COMPOSITION DE MATHEMATIQUES T - TA (3 h)

PREMIER PROBLEME

Dans ce problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé définissant les axes (ox, oy). ox est l'axe polaire origine d'un repère en coordonnées polaires.

On rappelle que si un point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère (ox, oy), (θ,ρ) dans le repère polaire associé, on a :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

(La question 2°) est indépendante des autres.)

1°) Construire la courbe Γ définie dans (ox, oy) par la représentation paramétrique :

$$M(\theta) \begin{cases} x = \sin^2\theta \\ y = \sin^2\theta \operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

2°) On fait le changement de paramètre $\operatorname{tg}\theta = t$.

La courbe Γ est représentée par :

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Soit une droite $ax + y + c = 0$ coupant Γ en trois points $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, $M_3(t_3)$.

Former l'équation ayant pour racines t_1, t_2, t_3.

En déduire que la condition nécessaire et suffisante pour que 3 points M_1, M_2, M_3 de Γ soient alignés est $\left[t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = 0\right]$.

Soit M(t) un point de Γ ; la tangente en M(t) à Γ recoupe (Γ) en M'(t'). Calculer (très simplement) t' en fonction de t.

On suppose 3 points de (Γ) $M_1(t_1)$ $M_2(t_2)$ $M_3(t_3)$ alignés suivant la droite $ax + y + c = 0$.

Les tangentes en M_1, M_2, M_3 recoupent la courbe en M'_1, M'_2, M'_3 ; montrer que ces 3 points sont alignés suivant une droite dont on donnera l'équation.

3°) On définit dans le plan moins le point O la transformation $\mathscr{C}$

$\mathscr{C}(M) = P$ par

$$M(x,y) \longmapsto \mathscr{C} \longrightarrow P(X,Y) \begin{cases} X = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ Y = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Comparer OM^2 et OP^2.

En déduire une définition géométrique simple de $\mathscr{C}$.

Soit Γ_1 la transformée de Γ par $\mathscr{C}$;

définir paramétriquement Γ_1 par le paramètre t :

$$\Gamma \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{C}} \Gamma_1 \begin{cases} X(t) \\ Y(t) \end{cases}$$

En déduire l'équation cartésienne (très simple) et la nature de Γ_1.

4°) On revient à la représentation initiale de Γ :

$$M(\theta) \begin{cases} x = \sin^2\theta \\ y = \sin^2\theta \operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

Montrer que θ peut être pris pour angle polaire de $M(\theta)$ dans le repère polaire d'axe ox ; en déduire une représentation de Γ en coordonnées polaires.

Former directement l'équation polaire de Γ_1 à partir de l'équation cartésienne.

Retrouver la définition géométrique de la transformation $\mathscr{C}$.

5°) Γ et Γ_1 ont 3 points communs : O, A, B.

Soit A le point dont les coordonnées (x,y) sont positives ; calculer l'aire comprise entre l'arc $\overset{\frown}{OA}$ de Γ et l'arc $\overset{\frown}{OA}$ de Γ_1.

(On choisira les formules et les représentations de Γ et Γ_1 qui sembleront les plus commodes).

.../...

DEUXIEME PROBLEME

Dans ce problème, si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, suivant l'usage, Im(f) est l'image de E par f ; le noyau de f, ou ker f, l'ensemble des vecteurs de E ayant pour image $\vec{0}$.

On rappelle également que si E est rapporté à une base, f pouvant alors être défini par une matrice, les vecteurs colonnes de cette matrice donnent l'image des vecteurs de la base.

1°) Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B}$:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$

avec $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$ $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)$ $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$ $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$

Soit f l'endomorphisme de E, dont la matrice, pour la base $\mathcal{B}$, est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Suivant les valeurs de a, trouver le rang de la matrice A.

Montrer que dans tous les cas, on peut prendre pour base de Im(f) une base $\mathcal{B}'$ extraite de $\mathcal{B}$.

Donner une base de ker f .

Im(f) et ker(f) sont-ils des sous espaces supplémentaires de E ?

2°) Dans tout ce qui suit, on prend a = 1.

On n'envisagera donc que la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit F = Im(f).

On peut restreindre f à un endomorphisme de F;

soit g cette restriction :

$$F \xrightarrow{\ g\ } F$$

$$\vec{x} \longmapsto g(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

T.S.V.P.

On rapporte F à la base $\mathcal{B}'$ définie précédemment ($\mathcal{B}'$ extraite de $\mathcal{B}$) ; calculer B, matrice de g dans cette base.

Soit h l'endomorphisme réciproque de g :

$h = g^{-1}$; C la matrice de h dans $\mathcal{B}'$:

$C = B^{-1}$; calculer la matrice C.

3°) Soit u l'endomorphisme de E ainsi défini :

l'image par u et l'image par h des vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont confondues.

u et f ont le même noyau.

Calculer D, matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Former la matrice de f o u o f

soit A.D.A.

Que remarque-t-on ?

Retrouver directement ce résultat sans utiliser les matrices.

99 F